Omar Mrad, Audrée Grégoire-Forget, Timothy Scott
MRAO13099405, GREA20539408, SCOT07129309

Mathématiques financières III

ACT2320, groupe 30

Note : A

Devoir de mathématiques financières III

Travail présenté à

Monsieur Pierre Caron

Université du Québec à Montréal (UQÀM)

14 décembre 2014

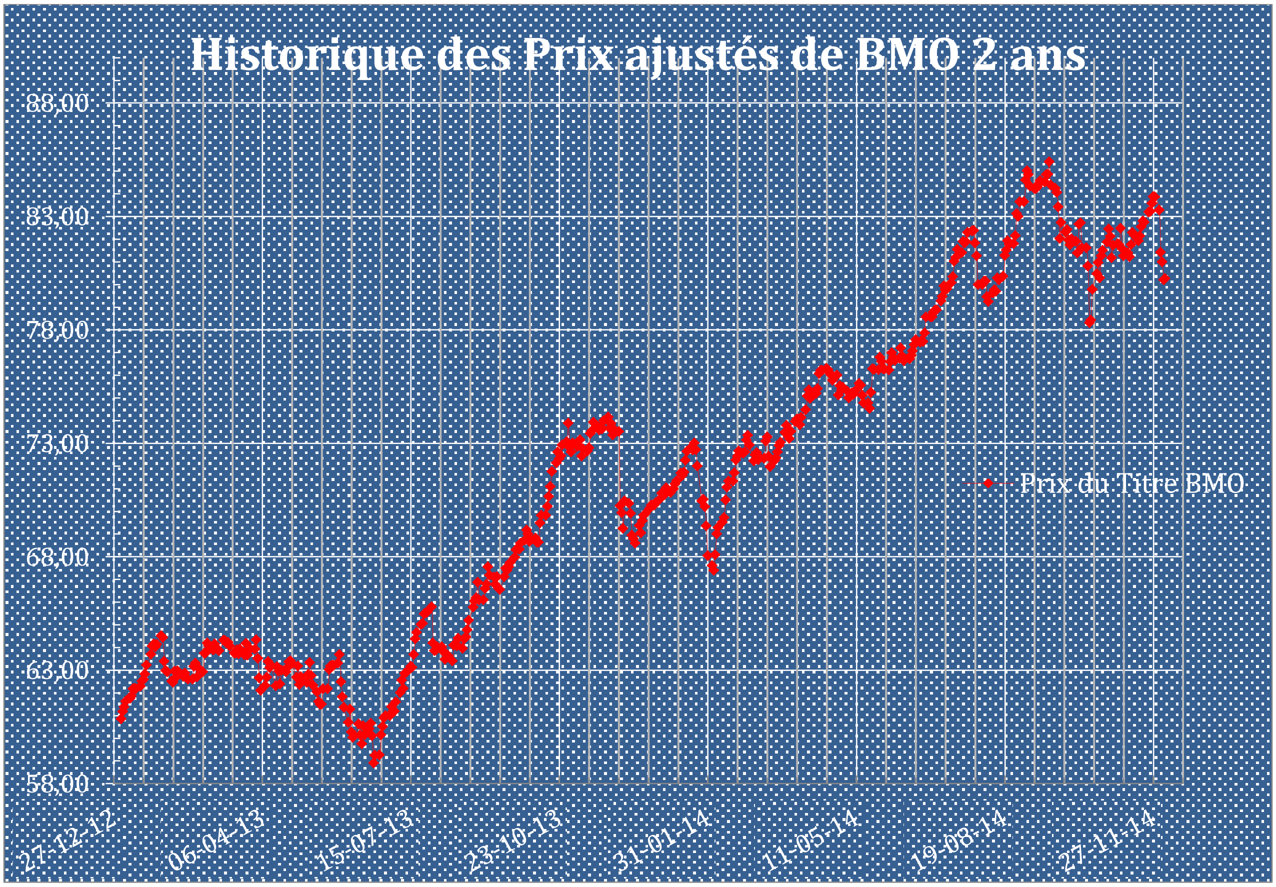
Table des matières

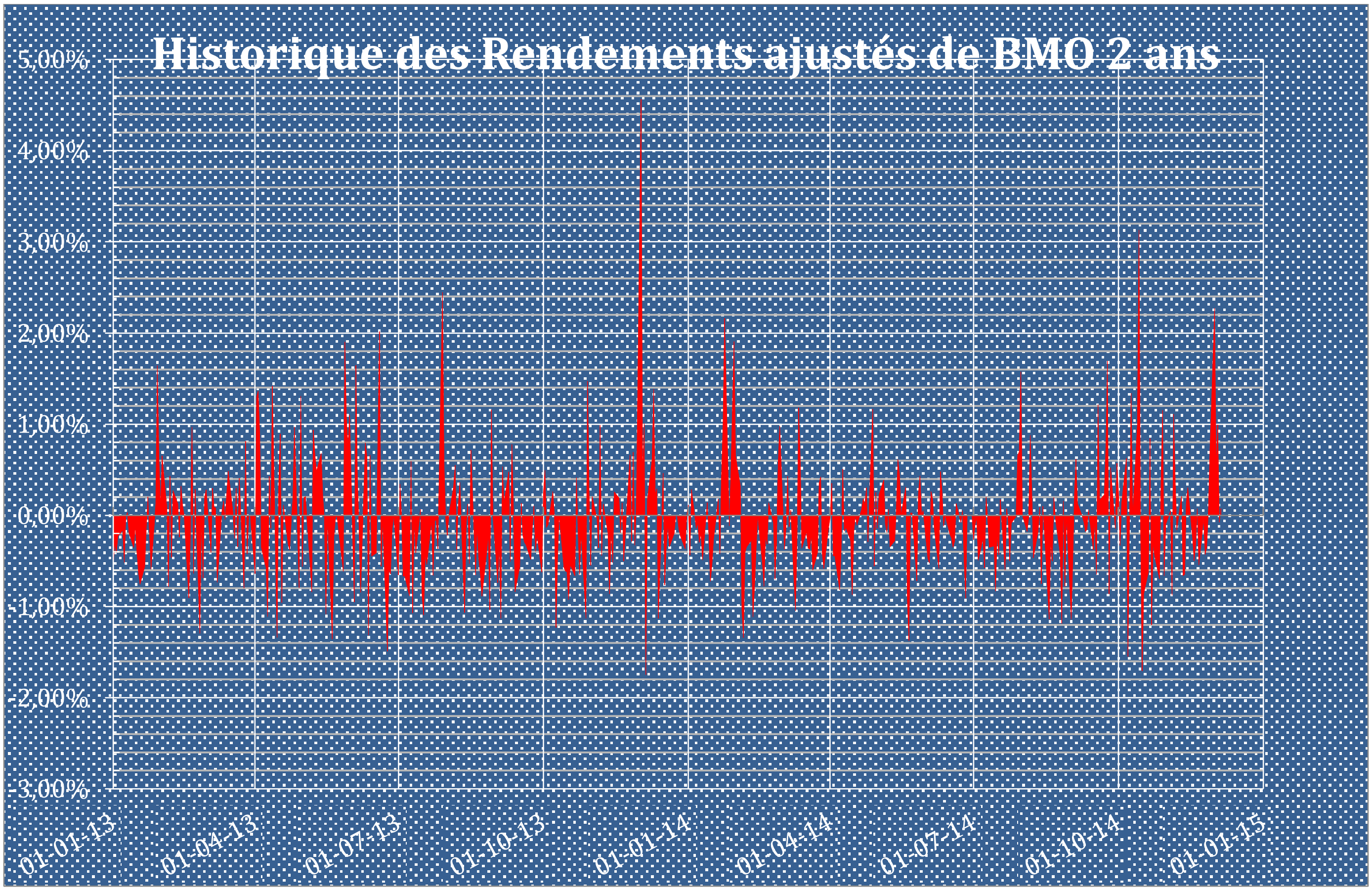
SOMMAIRE EXÉCUTIF

Le présent rapport fait état des résultats d'une analyse du titre et des options d'achat et de vente de la Banque de Montréal. L'historique des prix est à la base de notre analyse. D'abord, par ces données, nous avons dû déterminer la volatilité du titre au 5 décembre 2014 par deux méthodes d'estimation : le maximum de vraisemblance et GARCH (1,1). Il a été nécessaire, suite à ces deux estimations, de déterminer laquelle est la plus appropriée dans notre situation et de la comparer à la volatilité implicite que nous devions calculer avec un calculateur d'option. Cette dernière valeur a elle aussi été comparée à la volatilité implicite donnée par le site de la Bourse de Montréal. Suite à notre décision, nous avons été ainsi en mesure d'évaluer nos options d'achat et de vente par deux différentes méthodes au 5 décembre 2014, soient la méthode binomiale et la formule de Black-Scholes, qui est une méthode binomiale avec une infinité de pas. Une comparaison détaillée de ces deux méthodes avec les valeurs du marché suit logiquement. Les résultats obtenus par la méthode binomiale au premier pas nous permettent de calculer le prix des options par la méthode du portefeuille de réplication. Afin de rendre notre analyse complète, nous utilisons les mesures du premier pas et du dernier pas (en considérant que le prix augmente à chaque pas ou qu'il diminue à chaque pas) pour calculer les « greeks » (delta, gamma, thêta, rho et vega). Cette analyse nous permet donc d'avoir une meilleure compréhension des options et du titre sous-jacent.

L'équipe d'Omar, Audrée et Timothy

DONNÉES À PRÉSENTER





Tout d’abord, nous avons dû choisir le prix d’exercice de notre option d’achat et de vente qui devait être similaire au prix du titre. Nous avons donc choisi les options qui viennent à maturité le 17 avril 2015, soit plus de 90 jours après le 5 décembre, avec un prix d’exercice de 82 $. Présentons d’abord les données historiques du titre à quatre dates différentes.

Tableau 1. Données associées à différentes dates des options d’achat et de vente (en dollars)

	14 novembre	21 novembre	28 novembre	5 décembre
Prix de l’option d’achat (moyenne du cours acheteur et du cours vendeur)	3,1	3,375	3,75	1,72
Prix de l’option de vente (moyenne du cours acheteur et du cours vendeur)	3,225	2,8	2,335	3,7
Prix du titre	82,19	82,75	83,86	80,27

Une mesure utile pour notre analyse est la volatilité implicite, qui représente la volatilité des rendements de l’action sous-jacente calculée par itérations. Nous avons déterminé la volatilité implicite des deux options au moyen d’un calculateur d’option basé sur Black-Scholes. Comme nous avions seulement accès à un dividende discret, nous avons ajusté le prix de notre titre au 5 décembre 2014 en utilisant le dividende de 0,80 $ payable le 26 février 2015, soit à 83 jours du 5 décembre. De plus, nous avons choisi un taux sans risque de 9 %, qui équivalent au taux des bons du Trésor au 5 décembre annualisé pour la période entre cette date et l’échéance de nos options, le 17 avril 2015. Pour le taux de dividende utilisé dans le calculateur d’option, nous l’avons posé à 0.00 % comme nous avions déjà pris en compte le dividende discret dans nos hypothèses de départ.

Tableau 2. Comparaison de la volatilité implicite de chacune des options calculée à celle donnée sur le site de la Bourse de Montréal au 5 décembre 2014

	Option d'achat	Option de vente
Volatilité implicite calculée au moyen d'un calculateur d'option basé sur Black-Scholes	13,92 %	12,38 %
Volatilité implicite donnée sur le site de la Bourse de Montréal	13,74 %	11,12 %

Les volatilités calculées sont similaires aux volatilités implicites données sur le site de la Bourse de Montréal. En effet, il y a une différence de 0,18 % pour l'option d'achat et de 1,26 % pour l'option de vente. On note alors que nos volatilités implicites calculées concordent avec celles fournies : la volatilité implicite de l'option d'achat est supérieure à celle de l'option de vente.

DÉTERMINATION DE LA VOLATILITÉ DU TITRE

Les volatilités implicites des options que nous avons trouvées permettent de calculer la volatilité du titre par deux méthodes d'estimation, soient le maximum de vraisemblance et Black-Scholes, dans l'optique que nous devons recommander une méthode particulièrement. Avant de débuter notre analyse, nous posons une période de calcul d'un an. Nous avons choisi cet intervalle puisque généralement, l'analyse sur un titre d'une banque se fait sur une période de six mois, car les prix ne varient pas énormément (règle générale). En observant nos données, nous avons remarqué une certaine variation, c'est pourquoi nous avons fait le choix de prendre une période d'un an. Passons maintenant à l'analyse de chacune des méthodes.

Analyse de la méthode du maximum de vraisemblance

Le concept fondamental du maximum de vraisemblance consiste à choisir comme estimateurs des paramètres inconnus des valeurs telles que la vraisemblance pour obtenir l'échantillon soit maximisée. Dans notre analyse, on a posé l'hypothèse que les rendements quotidiens suivent une loi normale d'espérance 0 et de variance 1. Ainsi, pour déterminer l'estimation de la variance quotidienne, nous utilisons la formule $\sigma^2\,quotidien = \frac{\Sigma\,Rendements\,quotidiens\,effectifs}{Période-1}$ avec une période d'un an. Pour ensuite trouver l'estimé de l'écart-type annuel, nous utilisons $\sigma\,annuel = \sqrt{\sigma^2\,quotidien * 262}$. Nous avons choisi de multiplier par 262 puisque c'est le nombre de jours exacts en bourse entre le 5 décembre 2013 et le 5 décembre 2014 (contrairement à l'hypothèse de 252 jours qui est habituellement utilisée). Fait à noter, cette méthode assume l'efficience des marchés, donc que les rendements sont aléatoires.

Analyse de la méthode de GARCH (1, 1)

Tout d'abord, la méthode de GARCH est un modèle autorégressif de moyenne mobile ARMA dont l'utilisation est utile à la prévision de la volatilité. D'après le modèle général GARCH (p,q), la variance est égale à

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 .$$

Pour le GARCH (1,1), la formule est réduite à $\sigma^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 * r^2_t + \beta_1 * \sigma^2_{t-1}$, où α_0 = variance initiale estimée, α_1 = poids sur variance quotidienne (terme d'erreur) et β_1 = poids sur variance initiale estimée. La formule peut se trouver sous une autre forme $\sigma^2_t = \gamma\delta + \alpha_1 * r^2_t + \beta_1 * \sigma^2_{t-1}$. Suite à des recherches approfondies sur le sujet, nous avons trouvé un logiciel qui génère le modèle avec nos données sur Excel nommé NumxL Celui-ci a donc reproduit les valeurs de α_0, $\alpha_1$et β_1 dans la formule donnée ci-dessus. Afin de retrouver γ, le poids sur variance à long terme estimée, nous avons divisé la valeur α_0 par la variance long terme quotidienne implicite au modèle estimé, δ, qui a aussi été généré par le modèle. De plus, nous avons été en mesure de confirmer notre valeur de gamma avec l'équation $\gamma + \alpha_1 + \beta_1 = 1$. Finalement, nous avons pu générer la variance en utilisant la formule donnée ci-dessus qui la lie avec les poids. Nous avons pu calculer la volatilité annuelle avec la même formule utilisée avec la méthode du maximum de vraisemblance. Fait à noter, dans notre fichier Excel, l'onglet GARCH (1,1) avec NumxL contient les données générées, il faut donc que le modèle soit intégré à votre version d'Excel. Nous avons copier-coller les valeurs dans un autre onglet.

Présentons d'abord les données obtenues par les deux méthodes pour le calcul de la volatilité au 5 décembre 2014 afin de pouvoir faire une comparaison détaillée.

Tableau 3. Volatilité du titre déterminé par la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode de GARCH (1,1) au 5 décembre 2014

	Méthode du maximum de vraisemblance	Méthode de GARCH (1,1)
Volatilité calculée	15,309 %	11,11 %

Comparaison des deux méthodes pour la détermination de la volatilité

Tout d'abord, nous ne devrions pas accorder une crédibilité identique à toutes les observations. En effet, après une déclaration du dividende, il peut y avoir une hausse de la demande du titre, ce qui engendre une hausse de prix. Ainsi, cette hausse ne devrait pas être tenue en compte. Afin de comparer les deux méthodes, notons d'abord que le maximum de vraisemblance peut être biaisé avec un échantillon fini. En se basant sur les données d'une période d'un an, il est difficile de déterminer si cette période est suffisante pour obtenir une volatilité avec cette méthode qui n'est pas biaisée. Pour cette première raison, la méthode de GARCH est préférable, car elle permet d'obtenir une meilleure prévision pour la même période. Ensuite, il est dit que la méthode du maximum de vraisemblance assume l'efficience des marchés, ce qui implique que les rendements sont aléatoires. Il nous est difficile de confirmer cette hypothèse. De plus, la méthode de GARCH est la plus utilisée en finance pour la prévision de la volatilité. Cette méthode accorde plus d'importance et de poids sur les rendements récents et génère des prévisions plus précises à court terme. Pour ces multiples raisons, nous choisissons la méthode de GARCH (1,1) avec une volatilité calculée de 11,11 %.

Comparaison de la volatilité déterminée par la méthode de GARCH et la volatilité implicite

La volatilité implicite de l'option est une mesure utile pour les investisseurs puisqu'elle représente une volatilité anticipée pour la durée de l'option. De plus, elle se manifeste dans la prime de l'option, car une volatilité implicite élevée implique une prime élevée de l'option. Dans notre cas, nous trouvons une volatilité implicite de 13,92 % pour l'option d'achat et de 12,38 % pour l'option de vente comparativement à une volatilité déterminée par la méthode de GARCH de 11,11 %. Cette dernière est une volatilité historique du titre sous-jacent et est ainsi basée sur le passé contrairement à la volatilité implicite qui est plutôt une anticipation sur le futur. Un investisseur a donc intérêt à prévoir les données futures avec la volatilité implicite qu'avec la volatilité historique, bien que les deux mesures soient utiles pour se bâtir une vision globale du futur.

CALCUL DE LA VALEUR DES OPTIONS

L'étape suivante est donc de calculer la valeur de chacune des options selon deux méthodes. La première est la méthode binomiale, elle se base sur la notion de probabilités neutres au risque qui présume qu'il n'y a pas de possibilité d'arbitrage. De plus, cette méthode implique qu'on évalue l'option dans un monde sans risque. Pour la méthode de Black-Scholes, celle-ci se base sur la notion de portefeuille de réplication et correspond à la méthode binomiale avec une infinité de pas. De plus, cette méthode pose plusieurs hypothèses dont celles que le prix des titres suit une loi lognormale avec μ et σ constants, qu'il n'y a aucun versement de dividende et aucune possibilité d'arbitrage.

Tableau 4. Prix des options selon la méthode calculée avec la volatilité de GARCH (1,1) et valeurs du marché au 5 décembre 2014

	Méthode de Black-Scholes	Méthode binomiale	Valeurs du marché
Prix de l'option d'achat	1,2050	1,2653	1,72
Prix de l'option de vente	3,4669	4,4961	3,70

Comparaison des valeurs

Pour la méthode de Black-Scholes, nous observons une différence non négligeable pour l'option d'achat. En effet, la variation est d'environ -30 % pour l'option d'achat comparativement à -6,30 % pour l'option de vente par rapport aux valeurs du marché. Veuillez prendre note que pour toute comparaison qui suit, la variation calculée est toujours par rapport aux valeurs du marché. En calculant l'option d'achat avec la volatilité calculée au moyen de la méthode du maximum de vraisemblance plutôt qu'avec la méthode de GARCH, nous obtenons un prix de 1,9648 $, ce qui représente une variation d'environ 14,23 % qui est inférieure en valeur absolue à la variation pour la méthode de Black-Scholes. Par contre, pour l'option de vente, la variation est supérieure en calculant avec la volatilité de la méthode du maximum de vraisemblance. En effet, avec un prix de 4,226 $, on retrouve une variation de 14,24 %, qui est supérieure en valeur absolue à celle de -6,30 % avec la volatilité de la méthode de GARCH. Par conséquent, pour la méthode de Black-Scholes, il est préférable d'utiliser la méthode de GARCH pour l'option de vente et la méthode du maximum de vraisemblance pour l'option d'achat dans le calcul de la volatilité.

Pour la méthode binomiale, nous observons une différence non négligeable pour l'option d'achat et de vente. La variation est d'environ -26,44 % pour l'option d'achat et de 21,52 % pour l'option de vente. En calculant les options avec la volatilité calculée au moyen de la méthode du maximum de vraisemblance plutôt qu'avec la méthode de GARCH, nous obtenons un prix de 2,040 $ pour l'option d'achat et 5,517 $ pour l'option de vente. La variation de l'option d'achat est ainsi d'environ 18,63 %, donc inférieure à la variation en valeur absolue calculée avec la volatilité de la méthode GARCH, et celle de l'option de vente est de 49,12 %. Cette dernière différence est non négligeable et est même supérieure à celle obtenue avec la volatilité de la méthode GARCH. Pour la méthode binomiale, nous obtenons ainsi les mêmes résultats, soit d'utiliser la méthode de GARCH pour l'option de vente et la méthode du maximum de vraisemblance pour l'option d'achat dans le calcul de la volatilité.

Nous obtenons donc une certaine constance dans nos résultats. En comparant les volatilités calculées par les deux méthodes avec la volatilité implicite, nous observons que la volatilité obtenue par le maximum de vraisemblance (15,309 %) se rapproche à la volatilité implicite de l'option d'achat (13,74 %) donnée sur le site de la Bourse de Montréal, contrairement à la volatilité obtenue par GARCH (11,11 %) qui est davantage comparable à la volatilité implicite de l'option de vente (11,12 %). De plus, nous constatons que notre meilleure estimation pour l'option de vente (volatilité utilisée par la méthode de GARCH avec Black-Scholes) se rapproche davantage de la valeur réelle que pour l'option d'achat (volatilité utilisée par la méthode du maximum de vraisemblance avec Black-Scholes) puisque notre volatilité pour l'option de vente se rapproche davantage de la volatilité implicite de cette même option trouvée sur le site de la Bourse de Montréal que celle pour l'option d'achat comme mentionné ci-dessus. Conséquemment, le choix des volatilités utilisées pour l'option de vente et l'option d'achat diffèrent.

PORTEFEUILLE DE RÉPLICATION ET MESURES

Les résultats obtenus au premier pas de l'arbre par la méthode binomiale nous permettent de déterminer le prix des options par la méthode du portefeuille de réplication qui est à la base de Black-Scholes. Comme mentionné ci-dessus, la méthode du portefeuille de réplication supposer qu'il y a absence d'arbitrage et qu'un portefeuille ayant une valeur future certaine doit obtenir le rendement sans risque. Nous avons calculé le delta avec les valeurs du premier pas trouvé à l'étape précédente afin de déterminer le portefeuille sans risque et l'actualiser dans l'optique de trouver le prix des options. S'il n'y avait pas eu de dividende versé, nous aurions dû nous attendre à des prix égaux à ceux obtenus par la méthode binomiale. Par contre, comme le dividende est versé au milieu de la période, nous observons des prix qui diffèrent.

Tableau 5. Prix des options selon la méthode du portefeuille de réplication

	Méthode du portefeuille de réplication	Valeurs du marché
Prix de l'option d'achat	1,4889	1,72
Prix de l'option de vente	3,9883	3,70

Par rapport aux valeurs du marché, le prix de l'option d'achat a une variation d'environ -13,44 % alors que l'option de vente a une variation de 7,79 %. Nous pouvons considérer que celles-ci sont négligeables.

Mesures « greeks »

Les résultats de la méthode binomiale nous permettent finalement de calculer certaines mesures. Celles qu'on nomme « greeks » permettent de mesurer le changement dans la valeur d'une option causée par un changement dans une des variables qui permet de calculer le prix. Elles sont utilisées pour établir les stratégies obtenues avec les options et pour prévoir les changements dans le prix des options. La valeur de delta est la sensibilité de la valeur de l'option par rapport à une variation du prix du titre sous-jacent. Son équation est la variation du prix de l'option sur la variation du prix du titre sous-jacent. Pour la valeur de gamma, on la décrit comme étant la sensibilité de la valeur de delta par rapport à une variation du prix du titre sous-jacent. Son équation est donc la variation du delta sur la variation du prix du titre sous-jacent. La valeur de vega est quant à elle une mesure de sensibilité de la valeur de l'option par rapport à une variation dans la volatilité. Dans nos calculs, nous utilisons une variation de 0,1 % pour la volatilité, donc nous retrouvons la variation de la valeur de l'option sur la variation de 0,1 % de volatilité. Pour la valeur de thêta, elle mesure la sensibilité de la valeur de l'option causée par un changement du temps qu'il reste jusqu'à maturité. Nous utilisons une variation de 2 fois notre pas qui est de 15 jours dans les calculs, donc notre formule se trouve à être la variation de la valeur de l'option sur le double de notre pas. Finalement, la valeur de rho est la sensibilité de la valeur de l'option causée par un changement du taux sans risque utilisé. Ainsi, sa formule est la variation de la valeur de l'option sur la variation du taux sans risque que nous posons à 0,1 % dans nos calculs. Les formules utilisées se retrouvent aussi dans l'onglet « Binomiale GARCH » du document Excel. Nous pouvons ainsi présenter les valeurs obtenues.

Tableau 6. Mesures des « greeks » à différents endroits sur l'arbre binomial selon les options

		Au premier pas	À la maturité situation optimiste	À la maturité situation pessimiste
Option d'achat	delta	0,318902377	1	0
	gamma	0,085053037	0	0
	thêta	-1,50272541	1,000092995	0
	vega	18,43978066	215,4293318	0
	rho	-13,74519606	0	0
Option de vente	delta	-0,711990595	0	-1
	gamma	0,020261888	0	0
	thêta	-2,773875893	0	-0,005045736
	vega	24,24577476	0	143,6106092
	rho	25,8404166	0	0

Comparaison des valeurs obtenues

D'abord, il est important de noter qu'une situation pessimiste entraîne une baisse de prix et qu'on retrouve alors une valeur de l'option d'achat de 0 puisqu'on la calcule avec max(0, P-82). Ainsi, pour la situation pessimiste, on utilise des prix inférieurs à 82 $ (notre prix d'exercice) dans le calcul des « greeks » et comme ces mesures se calculent en fonction de la variation de la valeur de l'option, il est logique de retrouver des sensibilités nulles pour la situation pessimiste dans le cas de l'option d'achat. Cette même logique se retrouve dans la situation optimiste de l'option de vente. En effet, on retrouve à cet endroit des prix supérieurs à 82 $ (notre prix d'exercice) ce qui implique que les valeurs de l'option de vente à cet endroit sont nulles tout comme les valeurs des sensibilités, car leur valeur est max(0,82-P). De plus, delta tend à être égal à 1 pour l'option d'achat et à -1 pour l'option de vente comme on l'a mentionné plus tôt, ce qu'on retrouve dans la situation optimiste pour la première option et dans la situation pessimiste dans la deuxième. La mesure de gamma est donc directement liée à celle de delta et implique qu'une valeur de delta égale à 1 ou -1 donne une valeur de gamma nulle. Pour la mesure de vega, comme on a choisi une variation de 0,1% dans la volatilité, les valeurs obtenues nous indiquent que pour l'option de vente ainsi que pour l'option d'achat, une hausse de la volatilité implique une hausse de la valeur de l'option. Plus cette mesure est grande, plus on retrouve une importante variation causée par le changement de la volatilité. Pour la mesure de thêta, il est dit qu'elle est habituellement toujours négative pour des positions longues sur les options d'achat et de vente et positive pour des positions courtes. Par nous résultats nous remarquons davantage une baisse dans les valeurs qu'une hausse. Finalement, pour la valeur de rho, nous devrions observer une variation positive de la valeur de l'option d'achat et une variation négative pour l'option de vente en cas de hausse du taux d'intérêt sans risque. Nous obtenons le contraire. Plus le temps à maturité est élevé, plus nous observons un impact important de la variation du taux sans risque. Malgré certaines anomalies, cette analyse nous permet de mieux comprendre les impacts de la variation d'une seule variable à la fois sur la valeur des options à trois horizons différents.

CONCLUSION

Somme toute, nos analyses nous permettent de préférer certaines méthodes à d'autres. Tout d'abord, nous avons préféré la méthode de GARCH (1,1) à celle du maximum de vraisemblance pour le calcul de la volatilité du titre. En trouvant les prix des options par la méthode binomiale et celle de Black-Scholes, nous observons que les prix des deux options se rapprochent de celles du marché par la méthode de Black-Scholes. Par contre, la volatilité utilisée dans le calcul du prix diffère selon l'option dans l'optique d'obtenir un prix qui se rapproche le plus de la valeur du marché. Pour l'option d'achat, nous préférons la méthode du maximum de vraisemblance alors que pour l'option de vente nous choisissons la méthode de GARCH (1,1). Les résultats obtenus par la méthode binomiale permettent d'obtenir les prix par la méthode du portefeuille de réplication et de calculer les valeurs « greeks ». Cette analyse complète nous permet ainsi d'avoir une meilleure compréhension des méthodes pour obtenir des données sur les options et son titre sous-jacent.

L'équipe d'Omar, Audrée et Timothy

BIBLIOGRAPHIE

http://quote.morningstar.ca/Quicktakes/Stock/PriceHistory.aspx?t=XTSE:BMO&region=CAN&culture=en-CA

http://www.strategies-options.com/implied-volatility-matrix.html

http://fskrealityguide.blogspot.ca/2008/03/calculating-vega-and-other-greeks-in.html

http://www.bus.lsu.edu/academics/finance/faculty/dchance/Instructional/TN05-02.pdf

http://www.m-x.ca/f_publications_en/calc_guide_en.pdf